Modul 9. Model-model Variabel Acak Kontinyu (2)

9.1 VA HYPO (HypoExp) k–stage

VA yang terbentuk sebagai jumlah dari beberapa variabel acak eksponensial dalam berbagai stage/rate. HypoExp 2-stage ditulis sebagai $HYPO(\lambda_1, \lambda_2)$ memiliki PDF/CDF sbb.

PDF $f_X(x_i) = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$ untuk $t > 0$

CDF $F_X(x_i) = 1 - \dfrac{\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)}e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)}e^{-\lambda_2 t}$, untuk $t \geq 0$.

Mean $E[X] = \sum_{i=1}^{k} E[X_i] = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\lambda_i}$ (untuk k=2, $E[X] = \dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2}$)

Variansi $\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}[X_i] = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\lambda_i^2}$ (untuk k=2, $\mathrm{Var}[X] = \dfrac{1}{\lambda_1^2} + \dfrac{1}{\lambda_2^2})$)

Disk service time dapat dimodelkan sebagai HypoExp 3-stage dengan overall time dari seek time, latency time dan transfer time.

9.2 VA Erlang–k

Merupakan kasus khusus dari HYPO yaitu HypoExp k-stage dengan masing-masing VA exponensial dengan rate yang sama.

PDF $f_X(x_i) = \dfrac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}$ untuk $t > 0$, $\lambda > 0$, $k = 1, 2, \ldots$

CDF $F_X(x_i) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \dfrac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}$, untuk $t \geq 0$, $\lambda > 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Mean $E[X] = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{k}{\lambda}$

Variansi $\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{k}{\lambda^2}$

VA Erlang kadang-kadang digunakan untuk mengaproksimasi VA Uniform.

9.3 VA HyperExponential

Jika Hypo (termasuk juga Erlang) merupakan beberapa tingkatan (berurutan/serial) variabel acak Eksponensial, maka VA HyperExponential adalah campuran (paralel) antara beberapa variabel acak Eksponensial dengan berbagai rate.

Seandainya v.a. eksponensial menyatakan waiting time sampai suatu event muncul, maka v.a. HyperExponential adalah waiting time hingga kemunculan event dari beberapa jenis event (masing-masing dengan rate berbeda). Intensitas dari masing-masing kelompok event tersebut dinyatakan dalam formulasi sebagai pembobot α_i dari masing-masing v.a. eksponensial tsb dan total bobot adalah 1.

PDF $f_X(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$ untuk $t > 0$, $\lambda_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

CDF $F_X(x_i) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_i (1 - e^{-\lambda_i t})$, $t \ge 0$

Mean $E[X] = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\lambda_i}$

Variansi $\mathrm{Var}[X] = 2\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\lambda_i^2} - \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\lambda_i}\right]^2$

CPU service time bisa dimodelkan dengan HyperExp ini karena dalam suatu sistem terdapat beberapa jenis service

9.4 VA Gamma

Jika variabel avak Eksponensial menyatakan waktu tunggu hingga kedatangan event berikutnya dalam proses Poisson, kedatangan event berkutnya ke r dalam proses Poisson dinyatakan dengan v.a. Gamma.
Jika Y adalah va waktu tunggu tsb maka $Y = X_1 + X_2 + \dots X_r$ dengan masing-masing Xi adalah variabel acak eksponensial dengan parameter λ. Masalah ini dapat dianalisis sebagai probabilitas kedatangan r-1 event dalam selang waktu (0, t) dan probabilitas waktu tunggu event terakhir (ke r) adalah dt sejak waktu t tersebut:

$P[t < Y < t+dt] = P[r\text{-1 kedatangan dalam } (0, t) \text{ dan 1 dalam } (t, t+dt)]$
$= P[r\text{-1 kedatangan dalam } (0, t)]\ P[\text{1 dalam } (t, t+dt)]$
$= \mathrm{Poi}(r\text{-1}; \lambda)\ \mathrm{Exp}(\lambda)$
$= \frac{(\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t}}{(r-1)!} \cdot \lambda e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t}}{(r-1)!}$

PDF $f_Y(y) = \frac{\lambda^r y^{r-1} e^{-\lambda y}}{(r-1)!}$ untuk $r \ge 1$, dan $\lambda > 0$

CDF $F_Y(y) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda y)^r e^{-\lambda y}}{k!}$

Secara umum r bisa berharga real α, dengan (r-1)! disubstitusi dengan fungsi Gamma, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, dan $\alpha > 0$ serta $t > 0$, sehingga

PDF $f_Y(y) = \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)}$ dengan $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ serta $y > 0$,

CDF

Mean $E[X] = \alpha/\lambda$
Variansi $\mathrm{Var}[X] = \alpha/\lambda^2$

9.5 VA Chi-Square

VA Chi-square dengan *n* derajat kebebasan χ^2 adalah jumlah dari kuadrat *n* buat variabel acak normal baku ($N(0,1)$). Jadi

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$$

VA Chi-Square *n* derajat kebebasan ini dapat dipandang sebagai VA Gamma dengan $\lambda = ½$ dan $\alpha = n/2$

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

dengan

Mean $E[X] = n$

Variansi $\mathrm{Var}[X] = 2n$

9.6 VA Pareto

Nama-nama lainnya, distribusi double-eksponensial, distribusi hyperbolic, dan distribusi power-law.

PDF $f_X(x) = \alpha k^\alpha x^{-\alpha-1}$ untuk $x \geq k$, dan $\alpha > 0$ serta $k > 0$

CDF $F_X(x_i) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{k}{x}\right)^\alpha, & \text{untuk } x \geq k \\ 0, & \text{untuk } x < k \end{cases}$

Mean $E[X] = \begin{cases} \dfrac{k\alpha}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$

Variansi $\mathrm{Var}[X] = \begin{cases} \dfrac{k^2\alpha}{\alpha - 2} - \dfrac{k^2\alpha^2}{(\alpha-1)^2} & \alpha > 2 \\ \infty & \alpha \leq 2 \end{cases}$

Sangat berguna untuk memodelkan

- CPU time yang utilisasi oleh suatu proses.
- Ukuran file web pada webserver
- Jumlah byte data dalam FTP bursts
- Waktu "berpikir"-nya web browser

9.7 VA Weibull

Merupakan v.a. yang biasa digunakan untuk memodelkan distribusi kegagalan (failure) misalnya fatigue failure.

Pdf $f(x) = \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}$

Cdf $F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}$

dengan $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, dan $x > 0$

Mean $E[X] = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/\alpha} \Gamma(1 + 1/\alpha)$

Variansi $\mathrm{Var}[X] = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/\alpha} \left[\Gamma(1 + 2/\alpha) - \left[\Gamma(1 + 1/\alpha)\right]^2\right]$