

Modul 10. Proses-Proses Stokastik (1)

10.1Pendahuluan

Model masalah dalam topik-topik yang lalu mendefinisikan variabel acak X yang memiliki distribusi probabilitas yang diasumsikan tidak akan berubah terhadap waktu.

- Probabilitas kemunculan angka enam pada pelemparan dadu adalah tetap untuk setiap saat. Jika kemunculan angka enam kita beri harga 1 dan yang lain 0, maka menjadi variabel acak Bernoulli. Pelemparan dadu tersebut adalah proses yang bukan stokastik, karena setiap saat $P[X=1] = 1/6$.

Model masalah yang akan dibahas disini menspesifikasikan lebih lanjut hingga terdapat suatu keluarga variabel acak yang masing-masing diidentifikasi dengan suatu indeks dan masing-masing memiliki distribusi probabilitasnya sendiri-sendiri.

- Beban kerja sebuah server komputer berbeda dari hari ke hari secara periodik dalam satu minggu. Variabel acak dalam masalah ini adalah kuantitas beban pada suatu hari tertentu; terdapat suatu himpunan variabel acak dengan indeks (atau parameter) hari: $\{X(t) \mid t = \text{'senin', 'selasa', \dots, 'Minggu'}\}$. Probabilitas pun dinyatakan untuk setiap $X(t)$.

Berikut ini akan dibahas berbagai proses stokastik mulai model yang paling umum hingga model yang terkait dengan masalah spesifik tertentu.

10.2Proses Stokastik

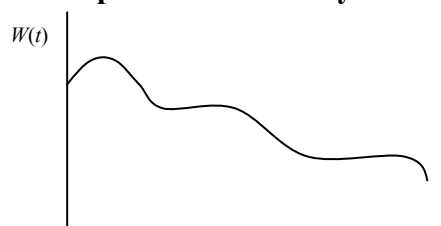
Proses stokastik adalah keluarga variabel acak $\{X(t), t \in T\}$. Satu harga t dari T disebut indeks atau parameter “waktu”.¹

- Jika $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ atau $T = \{\pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ maka proses stokastik ini berparameter diskret dan biasanya disingkat dengan notasi $\{X_n\}$.
- Jika $T = \{t \mid -\infty < t < \infty\}$ atau $T = \{t \mid t \geq 0\}$, maka proses stokastiknya berparameter kontinu dan dinyatakan dengan notasi $\{X(t), t \geq 0\}$.

Semua kemungkinan harga yang dapat terjadi pada variabel acak $X(t)$ disebut **ruang status**. Ruang status disebut diskret apabila *finite* atau *infinite countable*, sementara disebut kontinu bila berisi interval dari garis real.

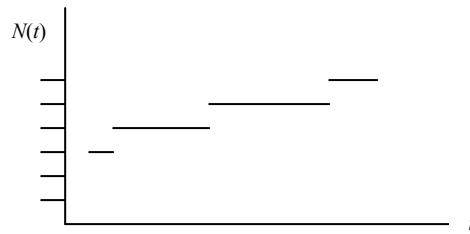
Contoh-contoh:

- Waktu tunggu sejak memberikan perintah komputer hingga dieksekusi adalah $\{W(t), t \geq 0\}$ memiliki **parameter kontinu** dan **ruang status kontinu**.

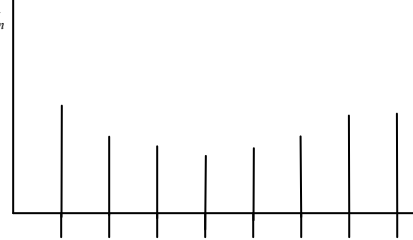


¹ Terminologi “waktu” disini dapat digunakan pada dimensi yang lain seperti panjang, luas, dsb.

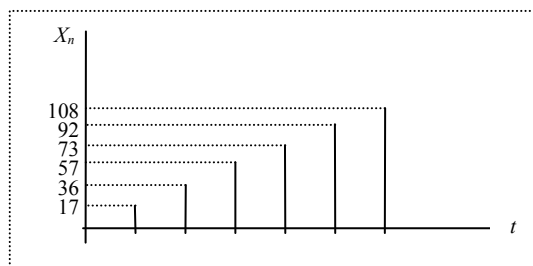
- Jumlah dari pesan yang datang dalam periode waktu dari 0 hingga t adalah $\{N(t), t \geq 0\}$ memiliki **parameter kontinu** dan **ruang status diskret**.



- $\{X_n, n = 1, 2, \dots, 12\}$ yang menunjukkan curah hujan rata-rata di Jakarta pada bulan ke n dalam satu tahun, memiliki **parameter diskret** dan **ruang status kontinu**.



- $\{X_n, n = \text{semester ke } 1, 2, 3, \dots\}$ yang menunjukkan jumlah SKS yang berhasil diperoleh si Tono pada semester ke n , memiliki **parameter diskret** dan **ruang status diskret**.



10.3 Proses Penghitungan (*counting*)

Suatu proses stokastik yang “menghitung” jumlah event yang terjadi hingga suatu saat tertentu (lihat contoh ke 4), dinyatakan dengan $\{N(t), t \geq 0\}$ yang memiliki sifat-sifat:

- $N(0) = 0$ (proses dimulai dari nol)
- $N(t) \geq 0$ (hanya berharga bulat non-negatif)
- $N(s) \leq N(t)$ tiap $s \leq t$ (penghitungan tidak akan pernah berkurang)
- $N(t) - N(s)$ adalah jumlah event yang terjadi dalam interval $(s, t]$

Berikut ini sejumlah varian mengenai proses menghitung.

Independent Increment Process

Suatu proses stokastik berparameter kontinu $\{X(t), t \geq 0\}$ memiliki independent increment bila event-event yang terjadi dalam interval-interval yang berbeda dan tidak bertumpang tindih, adalah independen. Bila $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ adalah n interval-interval waktu yang tak bertumpang tindih, maka n buah variabel acak: $Y_i = X(b_i) - X(a_i)$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$, adalah juga independen.

Stationary Increment Process

Suatu proses stokastik berparameter kontinu $\{X(t), t \geq 0\}$ memiliki stationary increment bila $X(t+h) - X(s+h)$ memiliki distribusi yang sama dengan $X(t) - X(s)$ untuk setiap harga s dan t namun tidak pada suatu harga tertentu s .

10.4 Proses Bernoulli

Jika X_1, X_2, \dots adalah variabel-variabel acak Bernoulli yang terdistribusi secara identik dan independen (*iid=identical independent distribution*) dengan probabilitas sukses p , dan suatu variabel acak $S_n = X_1 + \dots + X_n$ menyatakan jumlah sukses dalam n percobaan Bernoulli, maka $\{S_n, n = 1, 2, \dots\}$ disebut proses Bernoulli. Proses Bernoulli adalah proses stokastik dengan ruang status diskret $\{0, 1, 2, \dots\}$ dan dengan parameter diskret. Untuk setiap harga n , maka S_n adalah variabel acak binomial dengan distribusi

$$p(k) = P[S_n = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, n.$$

10.5 Proses Poisson

Suatu proses Poisson dengan *rate* $\lambda > 0$ adalah proses penghitungan dengan kondisi-kondisi yang harus dipenuhi sebagai berikut:

- 1). *Independent increment*
- 2). *Stationary increment*
- 3). Probabilitas kemunculan tepat suatu event dalam interval dengan panjang h adalah $\lambda h + o(h)$,² yaitu bahwa $P[N(h) = 1] = \lambda h + o(h)$
- 4). Probabilitas kemunculan lebih dari satu event dalam interval dengan panjang h adalah $o(h)$, yaitu bahwa $P[N(h) > 1] = o(h)$

Implikasi-implikasi dari kondisi-kondisi tersebut adalah:

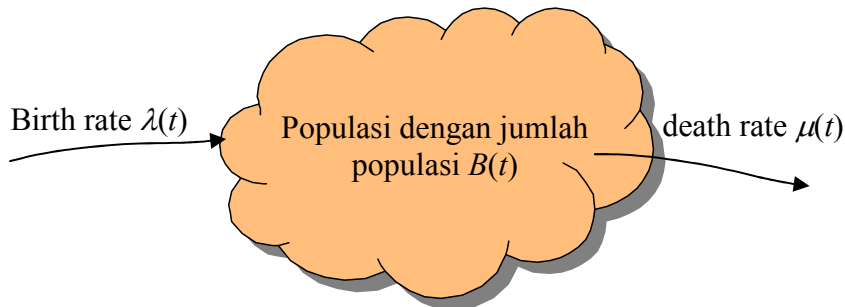
- Pada suatu proses Poisson dengan *rate* $\lambda > 0$, kemunculan tepat k buah event dalam selang waktu dengan panjang t merupakan variabel acak Poisson dengan parameter λt , serta rata-rata jumlah kemunculan event pada interval tsb adalah λt .
- Pada suatu proses Poisson dengan *rate* $\lambda > 0$, selang waktu kemunculan tiap dua event berturut-turut merupakan variabel acak eksponensial dengan *mean* $1/\lambda$.
- Jika suatu proses penghitungan dengan selang waktu kemunculan tiap dua event berturut-turut adalah variabel acak eksponensial dengan *mean* $1/\lambda$ maka proses tersebut adalah juga proses Poisson dengan *rate* λ .
- Bila dalam suatu proses Poisson suatu event terjadi pada selang waktu 0 hingga t , maka waktu kemunculan dari event itu merupakan variabel acak *uniform* pada selang waktu tersebut.
- Pada suatu proses Poisson dengan *rate* $\lambda > 0$, waktu tunggu hingga muncul event ke k merupakan variabel acak gamma dengan parameter k dan $\lambda > 0$, (*mean* k/λ , *var* k/λ^2).

² $o(h)$ atau dikenal juga sebagai "little-oh dari h " didefinisikan sebagai berikut:

f adalah $o(h)$ apabila $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Jika f adalah $O(h)$, maka pada h yang amat kecil f akan lebih kecil lagi dari h . Contoh, $f(x) = x$ bukan $o(h)$ sementara $f(x) = x^2$ adalah $o(h)$. Jika f dan g adalah $o(h)$ maka $(f+g)$ juga $o(h)$. Jika c konstanta dan f adalah $o(h)$ maka cf juga $o(h)$.

10.6 Proses Birth -and-Death (B&D)

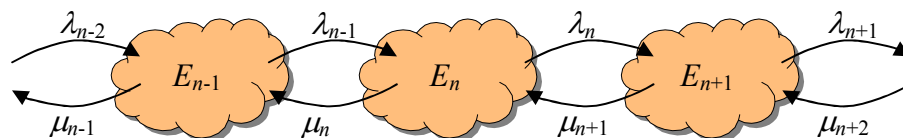
Pada model-model proses penghitungan di atas suatu variabel acak $N(t)$ menyatakan jumlah event. Jika event itu berupa obyek-obyek tertentu sehingga $B(t)$ menunjukkan jumlah populasi dari obyek. Dalam model tersebut selain terkait masalah “kemunculan” (*birth*) terkait juga masalah “kehilangan” (*death*) sehingga populasi bisa bertambah atau berkurang hingga 0.



Misalkan suatu proses stokastik berparameter kontinu $\{X(t), t \geq 0\}$, dengan ruang status diskret $0, 1, 2, \dots$. Proses ini menyatakan sistem berada dalam status E_n dengan $n = 0, 1, 2, \dots$ pada waktu t , jika dan hanya jika $X(t) = n$ (dalam hal ini sistem memiliki populasi berjumlah n).

Proses tersebut adalah Proses Birth-and-death jika terdapat sejumlah birth rate non-negatif $\{\lambda_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ serta death rate non-negatif $\{\mu_n, n = 1, 2, \dots\}$, yang memenuhi asumsi-asumsi berikut:

- Tidak ada lebih dari satu transisi terjadi bersamaan dan pada saat populasi kosong hanya berisi birth yang bisa terjadi. Untuk $n \geq 1$, transisi berbentuk $E_n \rightarrow E_{n+1}$ atau $E_n \rightarrow E_{n-1}$, kecuali itu hanya transisi $E_0 \rightarrow E_1$.
- Pada waktu t sistem berada dalam status E_n ,
 - P [pada selang waktu $(t, t+h)$ terjadi transisi $E_n \rightarrow E_{n+1}$] = $\lambda h + o(h)$
 - P [pada selang waktu $(t, t+h)$ terjadi transisi $E_n \rightarrow E_{n-1}$ untuk $n \geq 1$] = $\mu h + o(h)$
- P [pada selang waktu $(t, t+h)$ terjadi lebih dari satu transisi status] = $o(h)$ (dpl, pada waktu yang singkat probabilitas ini relatif kecil sekali)



Dari asumsi-asumsi tersebut proses B&D memberikan formulasi untuk probabilitas populasi berjumlah n pada saat t dengan persamaan differensial:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t), \text{ untuk } n \geq 1, \text{ atau}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \text{ untuk } n = 0$$

Bila status awalnya adalah E_i maka kondisi/probabilitas awalnya (pada $t = 0$) adalah $P_i(0) = 1$ dan $P_j(0) = 0$ untuk $j \neq i$.

Statistical Equilibrium

Bila proses B&D pada $t \rightarrow \infty$, $P_n(t)$ mengaproksimasi konstanta p_n maka proses tersebut dikatakan berada dalam statistical equilibrium (kesetimbangan statistikal) Istilah lain dari *statistical equilibrium* adalah *steady state* atau *stationary*. Dikatakan demikian karena sistem tidak lagi berubah menurut waktu. Jadi diperoleh:

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_n \dots \mu_2 \mu_1} p_0, \text{ untuk } n \geq 1.$$

Seterusnya bila deret berikut adalah

$$S = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_2 \mu_1} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_n \dots \mu_2 \mu_1} + \dots < \infty \quad (\text{i.e., } S \text{ konvergen})$$

dengan setiap λ_n dan μ_n non-negatif, maka $p_0 = 1/S > 0$, yaitu bahwa probabilitas sistem dalam keadaan kosong adalah positif. Dalam suatu sistem antrian hal ini menunjukkan sistem pelayanan kadang-kadang “catch up” (mampu melayani) setiap kustomer yang datang. Sebaliknya jika kuantitas S divergen, maka sistem antrian unstable akibat rate kedatangan lebih tinggi dari pelayanan. Jadi dalam sistem antrian yang mengikuti model proses B&D, dapat disimpulkan bahwa probabilitas steady state $\{p_n\}$ ada jika dan hanya jika S konvergen dan selanjutnya memiliki hubungan $p_0 = 1/S$.

Contoh 1

Dalam suatu pelayanan praktek dokter “tanpa antrian”³, diasumsikan bahwa

- kedatangan seorang pasien mengikuti proses Poisson dengan parameter λ (berarti probabilitas suatu kedatangan dalam interval $(0, h]$ adalah $\lambda h + o(h)$) dan
- waktu pemeriksaan seorang pasien bersifat eksponensial dengan parameter μ (jika dokter sedang memeriksa pasien pada waktu t , maka probabilitas akan selesainya pemeriksaan kepada pasien tersebut pada waktu $(t+h)$ adalah $1 - e^{-\mu h} = \mu h + o(h)$).

Dokter hanya memiliki dua kemungkinan status E_0 dan E_1 .

- E_0 : dokter sedang tidak melayani pasien dan
- E_1 : dokter sedang melayani pasien.

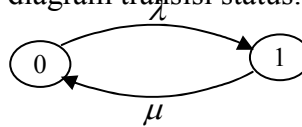
Jika sistem tsb berada dalam steady-state maka probabilitas p_0 dan p_1 sebagai

$$p_1 = (\lambda/\mu) p_0 \text{ atau}$$

³ Praktek dokter “tanpa antrian” maksudnya karena sepiunya maka setiap saat tidak pernah ada pasien yang datang sementara dokter sedang sibuk memeriksa pasien lain -- jadi selalu pasien datang dan langsung dilayani.

$$p_0 = \mu/(\lambda + \mu) \text{ dan } p_1 = \lambda/(\lambda + \mu)$$

Sistem ini memiliki diagram transisi status.



Jika $\lambda = \mu$ (*rate* kedatangan pasien persatuan waktu sama dengan 1/rata-rata waktu pelayanan untuk seorang pasien) maka kemungkinan dokter berada pada status sibuk atau tidak sibuk sama besarnya. Jika $\lambda < \mu$ maka ia kemungkinan lebih banyak nganggurnya dari melayani, dan sebaliknya. Misalnya pasien muncul rata-rata 2 orang dalam 1 jam ($\lambda = 2/\text{jam}$), dan lama waktu pemeriksaan rata-rata 15 menit ($\mu = 4/\text{jam}$) maka $p_0 = 0.67$ (lebih banyak nganggur).

Contoh 2

Suatu sistem PABX memiliki 4 line hunting dengan satu nomor yang sama. Rate penggunaan line dari luar / dalam diasumsikan tetap mengikuti proses Poisson dengan parameter λ . Lama bicara rata-rata juga tetap dan mengikuti eksponensial dengan parameter μ . Maka sistem ini memiliki lima status E_0, E_1, E_2, E_3 , dan E_4 . E_n berarti ada n line yang sedang digunakan. Maka dalam keadaan steady state diperoleh

$$S = 1 + \lambda/\mu + (\lambda/\mu)^2 + (\lambda/\mu)^3 + (\lambda/\mu)^4 \text{ dan}$$

$$p_n = (\lambda/\mu)^n / S \text{ untuk } n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Misalnya jika $\lambda = 6$ call/jam dan lama pembicaraan rata-rata 15 menit ($\mu = 4$ pembicaraan/jam), diperoleh $S = 13.1875$, dan kemudian

p_0	0.07583
p_1	0.11374
p_2	0.17062
p_3	0.25592
p_4	0.38389

Dengan rate tersebut nampaknya sistem akan cenderung berada dalam kondisi sibuk walaupun jumlah line ditambah. Namun, dengan jumlah staf tersebut tidak terlalu besar terhadap jumlah line, λ_n akan cenderung menurun jika n semakin besar. Misalnya λ_n berturut-turut 6, 5, 4, 3 akan menghasilkan kemungkinan ada line kosong yang lebih baik sbb.

p_0	0.13061
p_1	0.19592
p_2	0.24490
p_3	0.24490
p_4	0.18367