Modul 11. Proses-Proses Stokastik (2)

11.1 Proses/Rantai Markov

Proses stokastik $\{X(t),\ t \in T\}$ merupakan suatu Proses Markov jika untuk setiap n+1, dengan indeks $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ dan harga-harga status $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, terjadi persamaan:

$$P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, ..., X(t_n) = x_n] = P[X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n]$$

Persamaan tsb. secara narasi dapat dikatakan proses selanjutnya hanya bergantung pada status saat ini, bukan pada "sejarah" dari proses tersebut. Dalam proses Markov status-status proses yang terjadi selama ini dicerminkan oleh status saat ini.

Sebagaimana terminologi di awal, suatu proses Markov disebut Rantai Markov jika ruang status diskret. Untuk waktu diskret, rantai Markov dapat digambarkan sebagai diagram transisi status.

11.2 Transisi single-step (1-langkah)

Jadi probabilitas transisi dalam suatu rantai Markov (prose Markov dengan ruang satus diskret) dapat didefinisikan sebagai probabilitas single-step (**satu langkah**) berubahnya proses dari status i ke j,

$P[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$, dengan $n, i, j = 0, 1, 2, \ldots$

11.3 Probabilitas Transisi Stationer Rantai Markov

Jika rantai Markov mencapai situasi stasioner maka probabilitas tersebut tidak lagi bergantung pada n, sehingga kita menuliskan besaran probabilitas sebagai P_{ij}. Dengan demikian maka probabilitas proses berpindah dari status i ke status j **homogen dalam waktu**. Jadi kita dapat mendefinisikan seluruh probabilitas proses dalam bentuk matriks P.

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & P_{0j} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Yang disebut sebagai matriks probabilitas transisi (disingkat matriks transisi) dari rantai Markov. Jika jumlah status adalah berhingga yaitu n maka matriks transisi ini akan berukuran n baris × n kolom. Setiap elemen matriks P_{ij} adalah nonnegatif ($P_{ij} \geq 0$, untuk setiap $i, j = 0, 1, 2, \ldots$). Total probabilitas dalam setiap baris adalah 1 ($\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$, untuk setiap baris $i = 0, 1, 2, \ldots$).

11.4 Transisi Multistep (n-langkah)

Berdasarkan probabilitas satu langkah di atas, maka dapat dibentuk probabilitas n-langkah (n-step) yang menyatakan probabilitas transisi dari status i ke status j setelah melalui n langkah transisi.

$P^n_{ij} = P[X_n = j \mid X_0 = i]$, dengan $n, i, j = 0, 1, 2, \ldots$

Untuk rantai Markov dengan probabilitas stasioner maka

$P^n_{ij} = P[X_{n+m} = j \mid X_m = i]$, dengan $n, m \geq 0$

Sehingga diperoleh[1]

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m} \text{ untuk semua } n, m, i, j \geq 0$$

Atau secara khusus,

$$P_{ij}^{n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n-1} P_{kj}$$

Dalam notasi matriks, $P^{(n)}$ adalah matriks transisi untuk multistep, maka dapat diperoleh persamaan dalam matriks P sbb

$P^{(n)} = P^{(n-1)}P = P^{(n-2)}PP = \ldots = P^n$

yaitu bahwa $P^{(n)}$ adalah pangkat n dari matriks P.

11.5 Terminologi

Reachable State

status j *reachable* dari status i apabila dalam rantai dapat terjadi transisi dari status i ke status j melalui sejumlah transisi berhingga;

Terdapat n, $0 \leq n < \infty$, sehingga $P^n_{ij} > 0$

Irreducible Chain

jika dalam suatu rantai Markov setiap status reachable dari setiap status lainnya, rantai tersebut adalah *irreducible*.

Periodic State

suatu status i disebut *periodic* dengan perioda $d > 1$, jika $p^n_{ii} > 0$, hanya untuk n = d, 2d, 3d, …; sebaliknya jika $p^n_{ii} > 0$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$ maka status tersebut disebut *aperiodic*.

Probability Of First Return

Probabilitas kembali pertama kalinya ke status i terjadi dalam n transisi setelah meninggalkan i.

$f_i^{(n)} = P[X_n = i, X_k \neq i \text{ untuk } k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1 \mid X_0 = i]$

(note: $f_i^{(0)}$ didefinisikan = 1 untuk semua i).

Probability of Ever Return

probabilitas akan kembalinya ke status i setelah sebelumnya meninggalkan i.

$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)}$

---

[1] Berdasarkan $P_{ij} = P^1_{ij}$ serta $P^0_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $P^0_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ (yaitu Fungsi Delta Kronecker).

Transient State

Suatu status disebut *transient* jika probabilitas $f_i < 1$; yaitu bahwa setelah dari i melalui sejumlah transisi terdapat kemungkinan tidak dapat kembali ke i.

Recurrent State

Suatu status disebut *recurrent* jika probabilitas $f_i = 1$; yaitu bahwa setelah dari I melalui sejumlah transisi selalu ada kemungkinan untuk kembali ke i.

Mean Recurrence Time of State

Untuk suatu status *recurrent*, jumlah step rata-rata untuk kembali ke status i

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_i^{(n)}$$

Null Recur enct State

Suatu *recurrent* state disebut *reccurent null* jika$m_i = \infty$

Positive Recurrent State

Suatu *recurrent* state disebut *positive reccurent* atau *recurrent nonnull* jika$m_i < \infty$

Communicate State

Dua status, i dan j, dikatakan berkomunikasi jika i reachable dari j dan juga j reachable dari i; ditulis dengan notasi $i \leftrightarrow j$.

Ergodic

Rantai Markov disebut ergodic jika *irreducible*, *aperiodic*, dan seluruh status *positive recurrent*.

11.6 Teorema-teorema

Teorema mengenai Relasi Ekovalensi

(a) Relasi $i \leftrightarrow j$ merupakan relasi ekivalen, yaitu
   (a) untuk setiap status i, berlaku $i \leftrightarrow i$
   (b) jika $i \leftrightarrow j$, maka juga $j \leftrightarrow i$
   (c) jika $i \leftrightarrow j$ dan $j \leftrightarrow k$ maka $i \leftrightarrow k$

(b) Status-status suatu rantai Markov dapat dipartisi ke dalam kelas-kelas ekivalensi sehingga $i \leftrightarrow j$, jika dan hanya jika i dan j berada dalam kelas ekivalensi (partisi) yang sama.

(c) Suatu rantai Markov irreducible jika dan hanya jika di dalamnya hanya terdiri atas tepat satu kelas ekivalensi.

(d) Jika $i \leftrightarrow j$, maka i dan j memiliki perioda yang sama.

(e) Untuk $i \leftrightarrow j$, jika i recurrent maka juga j recurrent.

Teorema mengenai Irreducible

Jika $\{X_n\}$ suatu rantai Markov, maka tepat salah satu kondisi berikut ini terjadi

1) Semua status adalah positive recurrent
2) Semua status recurrent null
3) Semua status transient

Teorema mengenai Limiting Probability

Definisi: $\pi_j^{(n)}$ adalah probabilitas suatu rantai Markov $\{X_n\}$ berada dalam status j pada step ke n. Maka, $\pi_j^{(n)} = P[X_n = j]$.
Distribusi awal (intial) dari masing-masing status 0, 1, 2, .. dinyatakan sebagai $\pi_j^{(0)} = P[X_0 = j]$, untuk j = 0, 1, 2, ….

Suatu rantai Markov memiliki distribusi probabilitas stasioner $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ apabila terpenuhi persamaan $\pi = \pi P$ asalkan setiap $\pi_i \geq 0$ dan $\sum_i \pi_i = 1$.

Jika suatu rantai Markov homogen waktu (stasioner dari waktu ke aktu) yang irreducible, aperiodic, maka limit probabilitas

$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$, untuk j = 0, 1, …

selalu ada dan independen dari distribusi probabilitas status awal $\pi^{(0)} = (\pi_0^{(0)}, \pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \ldots)$.
Jika seluruh status tidak positive recurrent (jadi seluruhnya recurrent null atau seluruhnya transient), maka $\pi_j = 0$ untuk semua j dan tidak terdapat distribusi probabilitas stasioner.